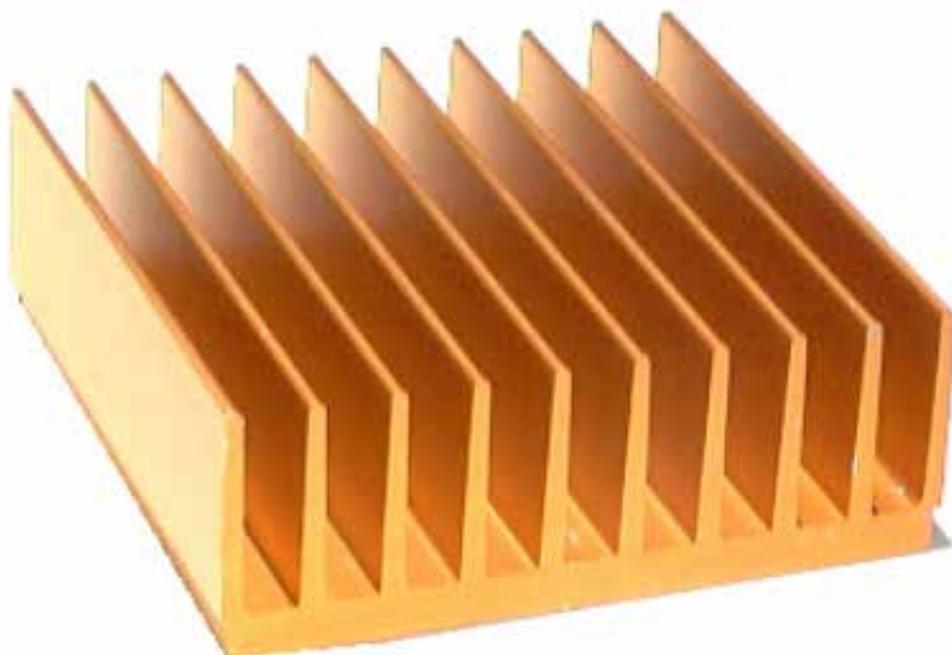


Aplicación del Método del Elemento Finito en la Ecuación de Calor en Aletas de Material de Aluminio y Cobre

Javier Norberto Gutiérrez Villegas¹, Israel Isaac Gutiérrez Villegas², Marco Antonio Gutiérrez Villegas³



Acerca de los autores...

^{1y2} Docentes del Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, México

³ Docente de la Universidad Autónoma Metropolitana, México, magv@azc.uam.mx

Resumen

En la ingeniería y en la física, los fenómenos de transporte de temperatura, en particular la transferencia de calor, juegan un papel muy importante para el diseño de hornos, motores de combustión interna, turbinas, turbo maquinaria,

deshidratadores, etcétera. En algunos casos específicos, lo que se requiere es mantener un dispositivo a una cierta temperatura, pero otros equipos requieren que se disipe el calor, problema que se abordará en este trabajo. Los fenómenos de transporte están regidos por ecuaciones diferenciales parciales de primero y segundo orden, sin embargo, debido a que la solución analítica de estos problemas es compleja, se usarán técnicas numéricas, como es el caso del método del elemento finito, para tener una solución aproximada. Es importante considerar que los modelos matemáticos son casos ideales, por lo que al llevarse al laboratorio es difícil que se cumplan las condiciones de frontera. En el presente estudio, se utiliza la solución analítica, numérica y las mediciones realizadas en el laboratorio, y en esta última, se emplearán otras consideraciones de frontera.

Palabras clave: Transferencia de calor, disipador de calor, modelización, simulación, elementos finitos.

Abstract

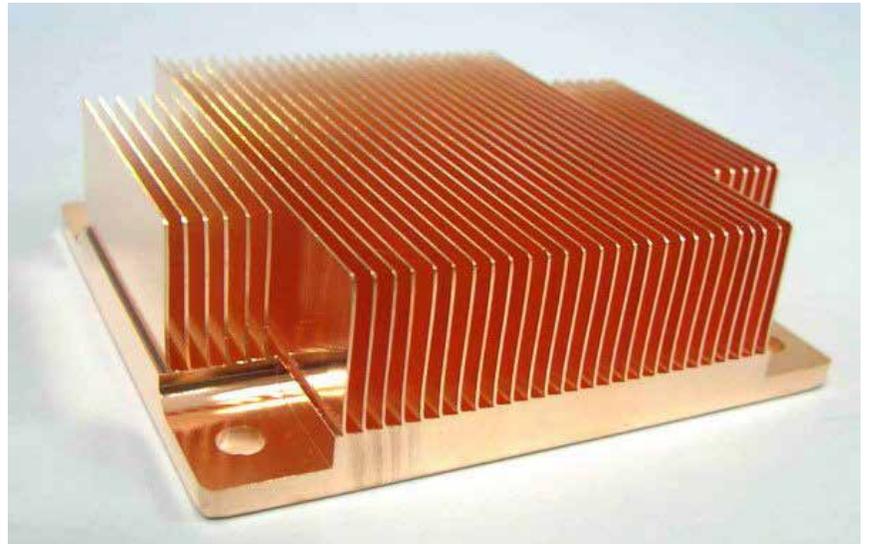
In engineering and physics, transport phenomena, of temperature particularly heat transfer, play a very important role in the design of furnaces, internal combustion engines, turbines, turbo machinery, dehydrators, and so on. In some specific cases, what is required is to keep a device at a certain temperature, but other equipment requires heat to dissipate, a problem that will be addressed in this work. The transport phenomena are governed by partial differential equations of first and second order, however, because the analytical solution of these problems is complex, numerical techniques, such as the finite element method, will be used to have a solution approximate. It is important to consider that mathematical models are ideal cases, so when taking to the laboratory it is difficult for border conditions to be met. In the present study, the analytical, numerical solution and measurements made in the laboratory are used, and in the latter, other border considerations will be used.

Keywords: Heat transfer, heat sink, modeling, simulation, finite elements.

Introducción

Con la globalización se ha impuesto la necesidad de actualizar las herramientas tecnológicas y de software para el desarrollo de nuevos productos o el mejoramiento de los ya existentes en la industria. Lo anterior se hace evidente en herramientas como computadoras y software especializado para realizar simulaciones, las cuales se utilizan ampliamente en la industria y en las escuelas para modelar y simular el mundo real, y para recolectar datos acerca del comportamiento físico de diferentes tipos de materiales y productos, que luego de un análisis profundo, permitirán mejorar su calidad.

En la actualidad, la mayoría de estos análisis se llevan a cabo mediante el Método de Elementos Finitos (en inglés Finite Element Method, FEM), con el cual se obtienen respuestas a numerosos problemas, y para aproximar las ecuaciones diferenciales de un sistema continuo, convirtiéndolo en un sistema discreto.



En el ámbito industrial, se aplica sobre todo para el desarrollo de nuevos productos o el mejoramiento de los ya existentes, pues facilita el desarrollo de prototipos, con los que se reduce el costo de elaboración o construcción de un producto o equipo. Asimismo, el método del elemento finito se utiliza con frecuencia para solucionar problemas reales de transferencia de calor por conducción.

Desarrollo

Una aleta, es la extensión de una superficie y se utiliza como mecanismo para aumentar la transferencia de calor hacia el medio que la rodea.

La ecuación diferencial parcial de la transferencia de calor está dada por:

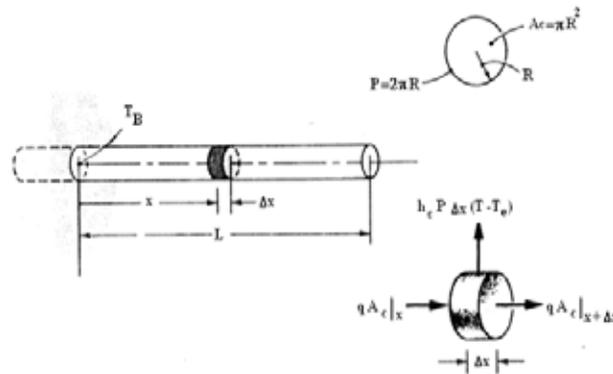


Figura 1

Aleta Cilíndrica

Consideremos una aleta cilíndrica como la que muestra la Figura (1). El área de la sección transversal es $A_c = \pi R^2$, donde R es el radio y perímetro $P = 2\pi R$. Tanto A_c como P son constantes, no varían a lo largo de la aleta en la dirección x . Ahí se realiza un balance de energía, puesto que el calor puede entrar y salir del elemento por conducción a lo largo de la aleta y también puede perderse por convección (h_c) desde la superficie del elemento con temperatura T al fluido que lo rodea a temperatura T_e . El área del elemento es $P \cdot \Delta x$:

$$qA_c|_x - qA_c|_{x+\Delta x} = h_c P \Delta x (T - T_e) \quad (1)$$

$$qA_c|_x - qA_c|_{x+\Delta x} - h_c P \Delta x (T - T_e) = 0 \quad (2)$$

Dividiendo entre Δx y haciendo $\Delta x \rightarrow 0$ (elemento diferencial) se obtiene

$$-\frac{d}{dx}(qA_c) - h_c P (T - T_e) = 0 \quad (3)$$

Para una aleta cilíndrica, A_c es independiente de x ; usando la ley de Fourier

$$q = -k \frac{dT}{dx} \quad \text{donde } k \text{ es la conductividad térmica}$$

se tiene

$$kA_c \frac{d^2T}{dx^2} - h_c P(T - T_e) = 0 \quad (4)$$

Ahora es necesario conocer las condiciones de frontera, ya que se quiere estudiar el comportamiento de la propia aleta y se tiene la condición de la temperatura en el extremo

$$T|_{x=0} = T_B \quad (5)$$

En el otro extremo de la aleta, ésta pierde calor por convección (ley de enfriamiento de Newton)

$$-A_c k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = A_c h_c (T|_{x=L} - T_e) \quad (5a)$$

Ya que el área del extremo AC es pequeña y en el experimento fue aislada con un trozo de madera, se llega a la conclusión de que

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} \cong 0 \quad (5b)$$

realizando un cambio de variable $\theta = T - T_e$ $\beta^2 = \frac{h_c P}{kA_c}$ donde

hc = Coeficiente convectivo

P = Perímetro de la aleta

k = Conductividad térmica

Ac = Área transversal al flujo de calor en la aleta

entonces la ecuación (4) se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \beta^2\theta = 0 \quad (6)$$

usando las condiciones de frontera, la ecuación (6) tiene la solución

$$\frac{T - T_e}{T_B - T_e} = \frac{\cosh[\beta(L - x)]}{\cosh[\beta L]} \quad \text{donde} \quad \beta = \sqrt{\frac{h_c P}{kA_c}} \quad (7)$$

Determinación del coeficiente de convección

La literatura especializada en la materia señala que existen relaciones empíricas para la determinación de los coeficientes de transferencia de calor por convección libre promedio. La siguiente funcional representa este fenómeno para distintos casos.

$$\overline{Nu}_f = C(Gr_f Pr_f)^m \quad (8)$$

Donde el subíndice f indica las propiedades en los grupos adimensionales que se evalúan a la temperatura de película y además, dado que los números de Grashof (Gr) y Prandtl (Pr) tienen una dimensión característica, ésta variará dependiendo del problema; para una placa vertical, L es la altura de la misma, y para este caso, un cilindro horizontal se considera como d (diámetro). Dado el número Nusselt promedio (\overline{Nu}), se tiene la siguiente definición; considerando las otras variables y el número Nusselt, se puede despejar el coeficiente convectivo promedio h_c .

$$\overline{Nu}_d = \frac{h_c d}{k} \quad (9)$$

El número de Grashof puede interpretarse físicamente como un grupo adimensional, que representa la razón de las fuerzas de flotación a las fuerzas viscosas en el sistema de flujo de convección libre, definido como

$$Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)d^3}{\nu^2} \quad (10)$$

donde

β = La inversa de la temperatura absoluta [K] a la cual está la película

T_w = Temperatura en la superficie

T_∞ = Temperatura en el medio convectivo

ν = Viscosidad cinemática (del aire en nuestro experimento)

d = Diámetro

g = Gravedad

El número Prandtl es un parámetro adimensional que relaciona los espesores relativos de las capas límite hidrodinámicas y térmicas. La viscosidad cinemática de un fluido transporta información acerca de la rapidez a la que el momento puede difundir a través del fluido, debido al movimiento molecular; es el lazo de unión entre el campo de velocidad y el campo de temperatura, y está definido como:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} \quad (11)$$

donde

μ =Viscosidad dinámica (del aire en nuestro experimento)

k = Conductividad térmica (del aire en nuestro experimento)

C_p =Calor específico a presión constante (del aire en nuestro experimento)

Una vez definidos los parámetros necesarios para encontrar al coeficiente convectivo, se tiene la definición del número Nusselt (alternativa a eq.(9)) para cilindros horizontales que se encuentra en [2]

$$Nu_d = 0.60 + 0.387 \left\{ \frac{Gr_d Pr}{\left[1 + (0.559/Pr)^{9/16}\right]^{6/9}} \right\}^{1/6} \quad (12)$$

otra alternativa al problema en cuestión, es la siguiente fórmula simplificada para cilindros horizontales. Esta fórmula será empleada para tener el valor mediante otro método.

$$h = 1.32 \left(\frac{\Delta T}{d} \right)^{1/4} \quad (13)$$

ΔT donde es la diferencia de temperaturas entre la superficie y la del fluido d es el diámetro de la aleta, para el desarrollo se uso aletas cilíndricas de dos materiales: aluminio (diámetro 1") y cobre diámetro (0.5") de largo 88cm.

Formulación del método del elemento finito

Se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial, con sus condiciones de frontera

$$\nabla(K\nabla\phi) = f \quad \text{en } \Omega \quad (14)$$

Condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} \quad \text{en } S_1 \\ K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z + g(x, y, z) + h(x, y, z)\phi &= 0 \quad \text{en } S_2 \end{aligned} \quad (15)$$

La ecuación diferencial parcial (14) bajo (15) es equivalente al siguiente principio variacional.

Minimizar

$$\begin{aligned} J(\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left\{ K_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + K_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + f\phi \right] dV \\ &+ \int_{S_2} \left(g\phi + \frac{1}{2} h\phi^2 \right) dS \end{aligned} \quad (16)$$

es decir $\delta J = 0$ para alguna $\delta\phi = 0$

introduciendo los elementos, se pueden sumar las contribuciones de cada elemento en la funcional

$$J = \sum_e J_e \quad (17)$$

$$\delta J = \sum_e \delta J_e \quad (18)$$

se introduce la solución aproximada en términos de las funciones de forma y de los valores nodales de ϕ sobre cada elemento

$$\phi^e = N_i \phi_i^e \quad (19)$$

$$\delta \phi^e = N_i \delta \phi_i^e \quad (20)$$

$$J_e = \int_{\Omega_e} \left[\frac{1}{2} \left(k_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) + f \phi \right] dV + \int_{\partial \Omega_e \cap S_2} \left(g \phi + \frac{1}{2} h \phi^2 \right) dS \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta J_e = & \int_{\Omega_e} \left[\left\{ k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\} + f \phi \right] dV + \\ & \int_{\partial \Omega_e \cap S_2} (g \delta \phi + h \delta \phi) dS \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} = & \int_{\Omega_e} \left\{ k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j^e \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta \phi_i^e + k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j^e \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta \phi_i^e + k_z \frac{\partial N_j}{\partial z} \phi_j^e \frac{\partial N_i}{\partial z} \delta \phi_i^e \right\} dV \\ & \int_{\Omega_e} f N_i \delta \phi_i^e dV + \int_{\partial \Omega_e \cap S_2} g N_i \delta \phi_i^e dS + \int_{\partial \Omega_e \cap S_2} h N_j \phi_j^e N_i \delta \phi_i^e dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta J_e = & \delta \phi_i^e \int_{\Omega_e} \left\{ k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right\} dV \phi_j^e \\ & + \delta \phi_i^e \int_{\Omega_e} f N_i dV + \delta \phi_i^e \int_{\partial \Omega_e \cap S_2} g N_i dS + \delta \phi_i^e \int_{\partial \Omega_e \cap S_2} h N_j N_i dS \phi_j^e \end{aligned} \quad (23)$$

$$\delta J_e = \delta \phi_i^e \left(K_{C_v}^e \phi_j^e + K_{S_2}^e \phi_j^e + R_{f_i}^e + R_{S_i}^e \right)$$

donde

$$K_{C_v}^e = \int_{\Omega_e} \left\{ K_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + K_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + K_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} dV \quad (24)$$

matriz de Stiffness (debido a la conducción)

$$K_{S_2}^e = \int_{\partial \Omega_e \cap S_2} h N_j N_i dS \quad (25)$$

matriz de Stiffness (debido a la convección)

$$R_{f_i}^e = \int_{\Omega_e} f N_i dV \quad (26)$$

debido al disipador de calor distribuido

$$R_{Si}^e = \int_{\alpha\Omega_e S_2} g N_i dS \quad (27)$$

debido al flujo de calor distribuido.

$$\delta J = \sum_e \delta J_e \quad (28)$$

Después del procedimiento de ensamble, se obtiene

$$\delta J = \phi_i (K_{Cij} \phi_j + K_{Sij} \phi_j + R_{fi} + R_{Si}) \quad (29)$$

para una arbitraria $\delta\phi_i$ con $\delta\phi = 0$, para los nodos en S1

$$[K_C]\{\phi\} + [K_S]\{\phi\} + \{R_f\} + \{R_S\} = 0 \quad (30)$$

o

$$[K]\{\phi\} = \{F\} \quad (31)$$

con

$$[K] = [K_C] + [K_S] \quad (32)$$

matriz de fuerza, debido a la fuente y flujo de calor.

$$\{F\} = -\{R_f\} - \{R_S\} \quad (33)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones (31) se encuentra la solución en los puntos nodales.

La distribución de temperaturas de manera teórica está dada por la siguiente forma y la única variable desconocida es h_c , por lo que se probaron distintos métodos (mencionados en el desarrollo teórico) para la determinación de ésta.

$$\frac{T - T_c}{T_B - T_c} = \frac{\cosh[\beta(L - x)]}{\cosh[\beta L]} \quad \text{donde} \quad \beta = \sqrt{\frac{h_c P}{k A_c}} \quad (34)$$

Aplicando la ecuación de Churchill y Chu para intervalos amplios de Gr Pr en cilindros horizontales y el método simplificado, se tienen los siguientes datos

TABLA 1
DATOS DEL ALUMINIO Y COBRE

Temperatura en x = 0 sobre el algodón [°C]	33	35
Temperatura en x = 88 cm sobre el algodón [°C]	26	25
Promedio de temperaturas sobre el algodón [°C]	29.5	30
Diferencia de temperaturas entre promedio y ambiente ($T_o - T_a$) [°C]	10.5	11
Beta β [K ⁻¹]	0.00331	0.003298
g (gravedad) [m/s ²]	9.78	9.78
ν = Viscosidad cinemática (del aire en nuestro experimento) [m ² /s]	15.68	15.68
d= diámetro (incluye al algodón) [m]	0.0762	0.0762
Grashof	611615	369575
μ = Viscosidad dinámica (del aire en nuestro experimento) [kg/m s *10 ⁵]	1.983	1.983
k= conductividad térmica (del aire en nuestro experimento) [W/m°C]	0.02624	0.02624
C_p =Calor específico a presión constante (del aire en nuestro experimento) [kJ/kg°C]	1.0057	1.0057
Prandtl	0.708	0.708
Grashof por Prandtl Gr*Pr	4.33*10 ⁵	2.62*10 ⁵
Nuselt Nu usando (11)	11.52	10.04
Despejando hc de (8) [W/m ² K]	3.97	4.15
Hc utilizando (12) [W/m ² K]	4.52	4.58
Promedio de los hc [W/m ² K]	4.24	4.36

Se realizó una aproximación de los hc (coeficientes convectivos para los dos materiales)

Aluminio = 4.28 W/m²K

Cobre = 4.44 W/m²K

TABLA 2
DATOS DEL ALUMINIO Y COBRE CON APROXIMACIÓN DE HC

Longitud (m)	Temperatura real (°C)	Temperatura teórica (°C)	Temperatura MEF (°C)	Desviación % MEF-teórica	Desviación % MEF-real	Desviación % teórica-real %
0	112	112.000	112	0.00	0.00	0.00
0.16	93	90.732	91.463	0.81	1.65	2.44
0.191	89	87.358	87.107	0.29	2.13	1.85
0.237	84	82.744	82.156	0.71	2.20	1.49
0.309	78	76.400	75.275	1.47	3.49	2.05
0.395	71	70.092	68.291	2.57	3.82	1.28
0.485	66	64.817	63.163	2.55	4.30	1.79
0.578	61	60.644	58.92	2.84	3.41	0.58
0.676	56	57.524	56.078	2.51	0.14	2.72
0.777	54	55.579	54.576	1.80	1.07	2.92
0.888	52	54.853	54.378	0.87	4.57	5.49
			Promedio	1.49	2.43	2.06

Comparando los resultados de los cálculos hechos para la aleta de aluminio, se obtuvo lo siguiente:

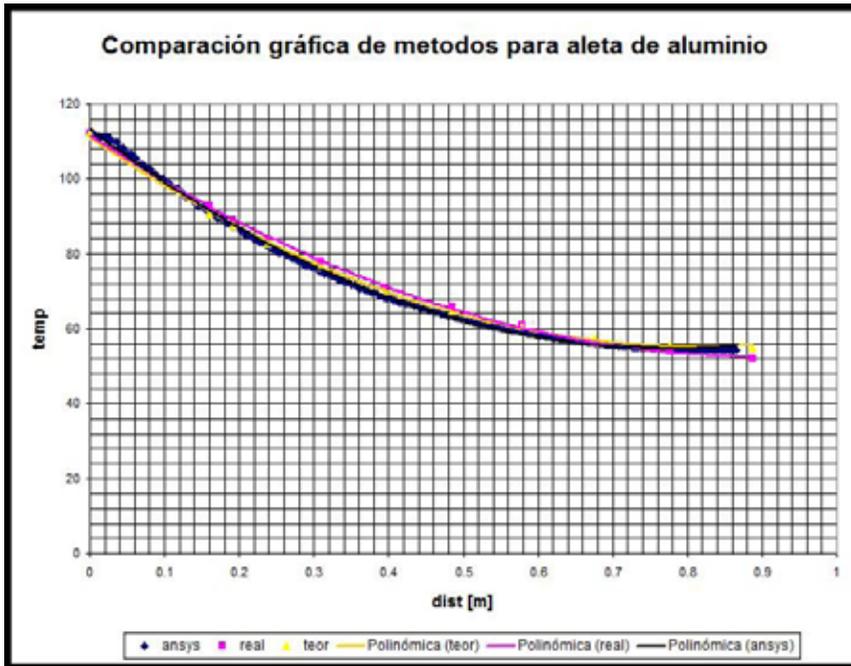


Figura 2

Gráfica comparativa usando los métodos analíticos, el MEF y experimental.

TABLA 3
COMPARACIÓN DE MÉTODOS PARA ALETA DE COBRE

Longitud (m)	Temperatura real (°C)	Temperatura teórica (°C)	Temperatura MEF (°C)	Desviación % MEF-teórica	Desviación % MEF-real	Desviación % MEF-real %
0	112	112.000	112	0.00	0.00	0.00
0.16	94	89.586	89.998	0.46	4.45	4.93
0.19	91	86.162	86.567	0.47	5.12	5.61
0.238	88	81.131	81.319	0.23	8.22	8.47
0.31	82	74.536	74.059	0.64	10.72	10.01
0.395	75	68.074	67.347	1.08	11.36	10.17
0.485	68	62.618	62.03	0.95	9.62	8.60
0.578	56	58.313	57.688	1.08	2.93	3.97
0.678	51	55.046	54.333	1.31	6.13	7.35
0.78	48	53.049	52.428	1.18	8.45	9.52
0.89	45	52.323	51.934	0.75	13.35	14.00
			Promedio	0.74	7.30	7.51

Comparando los resultados de los cálculos hechos para el cobre, se obtuvo lo siguiente:

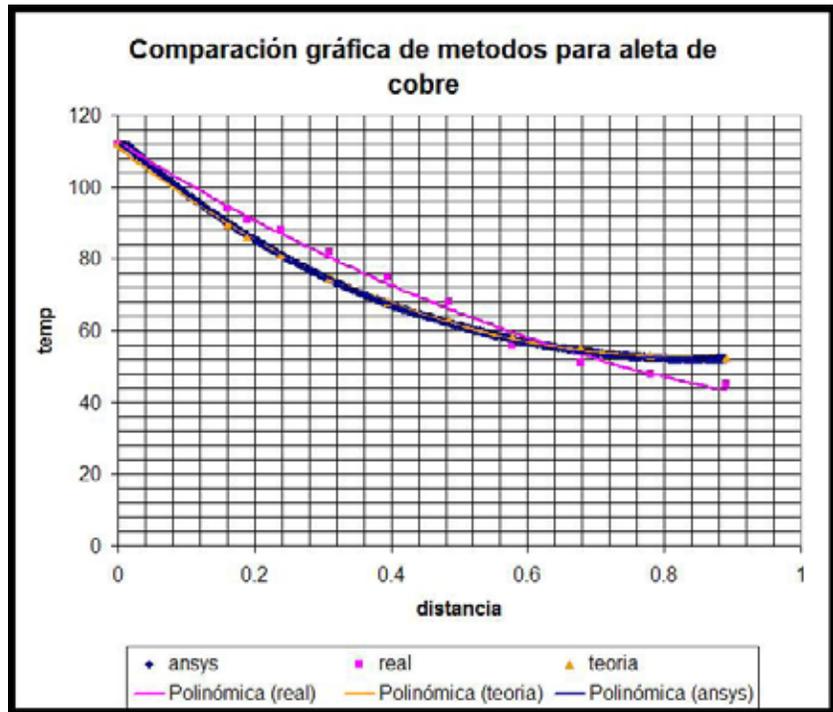


Figura 3

Comparativa usando los métodos analíticos, el MEF y experimental

Conclusiones

1.- Las relaciones empíricas empleadas en este artículo para la determinación de coeficientes convectivos son muy próximas entre sí; comprobándose estas relaciones a partir de los resultados experimentales obtenidos, esos mismos coeficientes convectivos se emplearon en el método del elemento finito, obteniendo graficas con curvas muy próximas entre sí.

2.- Los métodos empíricos utilizados para el desarrollo de esta investigación, arrojan resultados con errores no mayores al 2% en comparación con los métodos teóricos, y no mayores al 7% con respecto a los experimentales.

3.- Asimismo, los resultados de los errores mayores registrados en las barras (entre el experimental con el elemento finito y teórico) fueron debidos a que el tornillo que sujetaba el tapón de madera (extremo aislado) a la aleta estaba transfiriendo calor al exterior, esto se observa porque la pendiente de la gráfica en los últimos puntos de la misma no tiene valor de cero (como lo predice la teoría debido al aislamiento), y dado que la sección transversal en el cobre era menor que en el aluminio, esa pendiente negativa se acentúa aún más, ya que en proporción afecta más al cobre (por ser mejor conductor) que al aluminio.

Referencias Bibliográficas

- [1] Necati Özışık, M., (1980). *Heat Conduction*. EE.UU., Ediciones John Wiley & Sons.
- [2] Necati Özışık, M., (1989). *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, EE.UU., Publicaciones Dover, pp. 353-356.
- [3] Nacamura, S., (1992). *Métodos numéricos aplicados con software*, Prentice-Hall pp. 471-485.
- [4] Stephenson, G., (1982). *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*. España, Editorial Reverté, pp. 53-63.
- [5] Ortega H.J.A, y Gutiérrez V, M.A., (2000). *Formulaciones Variacionales en la Transferencia de Calor*, Vol. 14 Serie en Ciencia e Ingeniería (SEPI-ESIME-ZAC), pp. 20-40, 293-299, 337-338.
- [6] Paquete Computacional Ansys.