

# Solución de la Ecuación de Laplace en Condiciones de Frontera de Tipo Dirichlet, Mediante un Software Desarrollado en C++ Qt para Utilizar el FEM y el Generador de Mallado Delaunay

Manuel López Godínez<sup>1</sup>, Esiquio Martín Gutiérrez Armenta<sup>2</sup>, Javier Norberto Gutiérrez Villegas<sup>3</sup>, Israel Isaac Gutiérrez Villegas<sup>4</sup>, Marco Antonio Gutiérrez Villegas<sup>5</sup>



## Acerca de los autores...

<sup>1 y 2</sup> Docente del Instituto Politécnico Nacional, México.

<sup>3 y 4</sup> Docente de Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, México.

<sup>5</sup> Docente de la Universidad Autónoma Metropolitana, México.

## Resumen

Este trabajo tiene la finalidad de proporcionar una herramienta numérica para resolver problemas de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en estado estacionario, debido a que en diversas partes de las ciencias los problemas son modelados matemáticamente por ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, para estudiar su comportamiento, haciendo uso de uno de los lenguajes de programación de alto nivel y los orientados a objetos, como es el caso de C++ Qt para desarrollar una interfaz gráfica amena con el usuario. Asimismo, se modificó un software, dando como resultado el TDHEAT-Mejorado desarrollado en C++ Qt, (Blanchette, 2008 y Thompson, 1998), donde fueron integrados los programas: TDHEAT (Rischpater, 2013) y Triangle (Seegerlind, 1984), mismo que descompone el dominio de elementos triangulares. El TDHEAT fue desarrollado y programado en Fortran 90, para resolver problemas en estado permanente en dos dimensiones, por ejemplo, la ecuación del calor para placas en dos dimensiones, utilizando el Método de Elemento Finito (MEF) a éste por sí solo, se le tienen que ingresar las coordenadas de los nodos de cada uno de los elementos triangulares de los que se obtuvieron para realizar una partición del dominio por algún programa que malle; posteriormente, se le debe proporcionar las condiciones de frontera de cada uno de éstos.

El Generador de Malla de Delaunay 2-dimensional programado en C, fue desarrollado por Jonathan R. Shewchuck, del área Ciencias de la Computación de la Universidad de California en Berkeley (Shewchuk, 2000, y Siu, 2013). Este software da como resultado el mallado del dominio, pero aun así se tiene que automatizar la entrada de la información al programa del FEM. El software TDHEAT-Mejorado proporciona un uso amigable gracias a su Interfaz Gráfica de Usuario (IGU) construido para plataformas de software libre, como es el caso de las diferentes distribuciones de Linux, y no requiere de intérprete para su ejecución en el sistema operativo. Con el desarrollo de este software, ya no es necesario introducir coordenadas ni las condiciones de frontera que actúan sobre cada una de las particiones del modelo, en este caso elementos triangulares.

**Palabras clave:** MEF, C++, Qt, Ecuación de calor, Malla de Delaunay.

## Abstract

*This work has the purpose of providing a numerical tool to solve problems of partial differential equations of second order in steady state, because in diverse parts of the sciences the problems are modeled mathematically by partial differential equations of second order, to study their behavior, using one of the high-level programming languages and object-oriented programming languages, such as C++ Qt to develop a user-friendly graphic interface. Besides, a software was modified, resulting in the TDHEAT-Mejorado developed in C++ Qt, (Blanchette 2008, y Thompson, 1998), where the programs were integrated: TDHEAT (Rischpater, 2013) and Triangle (Seegerlind, 1984), which decomposes the domain of triangular elements. The TDHEAT was developed and programmed in Fortran 90, to solve problems in permanent state in two dimensions, for example, the heat equation for plates in two dimensions, using the Finite Element Method (MEF) to this one on its own; they have to enter the coordinates of the nodes of each of the triangular elements from those that were obtained to make a partition of the domain by some malleable program; subsequently, the boundary conditions of each of these must be provided.*

*The 2-dimensional Delaunay Mesh Generator programmed in C, was developed by Jonathan R. Shewchuck, from the Computer Science area of the University of California at Berkeley (Shewchuk, 2000, and Siu, 2013). This software results in the meshing of the domain, but still has to automate the entry of information to the program of*

the FEM. The TDHEAT-Enhanced software provides a friendly use thanks to its Graphical User Interface (GUI) built for free software platforms, as is the case of the different distributions of Linux, and does not require an interpreter for its execution in the operating system. With the development of this software, it is no longer necessary to enter coordinates or the boundary conditions that act on each of the partitions of the model, in this case triangular elements.

**Keywords:** MEF, C++, Qt, Heat equation, Delaunay mesh.

## Introducción

En la actualidad, la simulación numérica asistida por computadora es una herramienta necesaria, óptima y muy importante, que se utiliza para resolver problemas complejos de manera fácil y práctica en la ciencia y la ingeniería. Asimismo, traduce los aspectos más relevantes de un problema de la vida real, el cual es modelado matemáticamente; éste es traducido a una descripción matemática de forma discreta, que recrea y da solución al problema, haciendo uso de la tecnología y mención a la computadora.

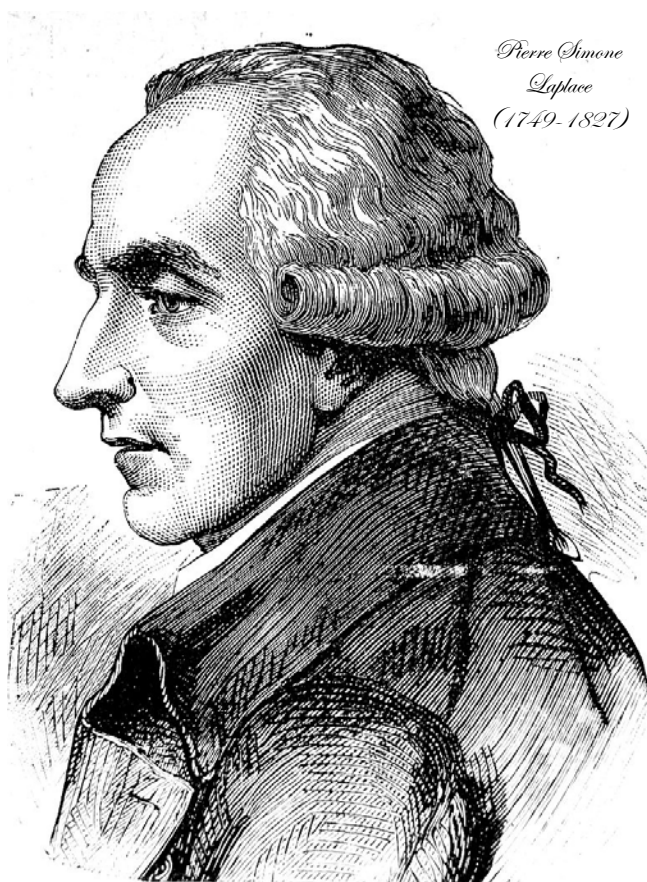
El uso de software educativo de simulación juega un papel importante para la validación de teorías, la comprensión, interpretación y análisis de los resultados experimentales, e igualmente actúa como un puente entre los modelos experimentales y las predicciones teóricas.

La implementación de software educativo de simulación numérica implica traducir la descomposición del dominio y los algoritmos numéricos a un código computacional, llamado lenguaje de programación. Para el desarrollo del lenguaje de programación, se deben considerar los siguientes aspectos: la velocidad de cálculo, el almacenamiento y la facilidad del usuario para interactuar con el software.

Actualmente, una de las herramientas tecnológicas del cómputo científico más utilizadas es el Método de Elemento Finito (MEF), que consiste de un método numérico para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales. Éste, junto con el Método de Volumen Finito (FVM) y el Método de Elemento Frontera (BEM), resuelven ecuaciones diferenciales parciales, y podrían ofrecer soluciones en diversas áreas, como problemas sociales, optimización de los recursos materiales y humanos de las empresas, problemas económicos y administrativos, problemas mecánicos o fenómenos físicos en los que se incluyan fluidos, transferencia de calor, deformación mecánica y propagación de ondas electromagnéticas, por mencionar algunos ejemplos, que pueden ser aplicados a la industria.

Desde un punto de vista científico, tecnológico y técnico de programación y simulación computacional educativa, se desarrolló el software TDHEAT-Mejorado, el cual se utilizó para resolver la ecuación del calor, obteniendo como resultado su solución de manera analítica; existen topologías todavía más complejas que requieren de un mapeo previo para llegar a obtener su solución. En esta investigación se calculará la distribución de temperaturas en una placa plana en 2D con condiciones de frontera de tipo Dirichlet.

Además, el principal requerimiento del Método de Elemento Finito (MEF), es tener un adecuado generador de mallas para discretizar el modelo que será objeto de estudio para obtener una solución óptima. Asimismo, en el presente estudio, se demostrará que



Pierre-Simon  
Laplace  
(1749-1827)

el generador de mallas Triangle es el óptimo para esta operación y será elegido para ser implementado en TDHEAT-Mejorado. Uno de los grandes retos en la actualidad, es que los generadores de mallas no han sido integrados en un único software, por lo cual, debido a lo antes mencionado, se propone un software de Ingeniería Mecánica con fines aplicados a problemas en estado permanente, que sea fácil de utilizar y amigable con el usuario.

## Metodología de desarrollo

### 1.- Ecuación de calor

Considere la siguiente aplicación de la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0(1)$$

La ecuación (1) modela la distribución de temperaturas en estado permanente para un cuerpo 2D en condiciones de tipo Dirichlet. Asumamos que tenemos un cuerpo cuadrado unitario Figura 1, con las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \theta(0, y) &= 0, (0 < y < w) \\ \theta(L, y) &= 0, (0 < y < w) \\ \theta(x, 0) &= 0, (0 < x < L) \\ \theta(x, w) &= \theta_c = 100^\circ\text{C}, (0 < x < L) \end{aligned} \quad (1d)$$

Donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas nodales,  $L$  y  $w$  son las longitudes y el ancho del cuerpo. Entonces, la solución analítica de (1) bajo las condiciones de frontera (1d) es:

$$\theta(x, y) = \frac{2\theta_c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \right) \left( \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi w}{L}\right)} \right) \right] \quad (2)$$

Discretizando la ecuación (2) para la placa 2D mostrada en la Figura 1, se obtienen los siguientes valores de temperatura. Asimismo, lo que se necesita conocer son los valores en los puntos interiores, a los cuales se les llamará nodos.

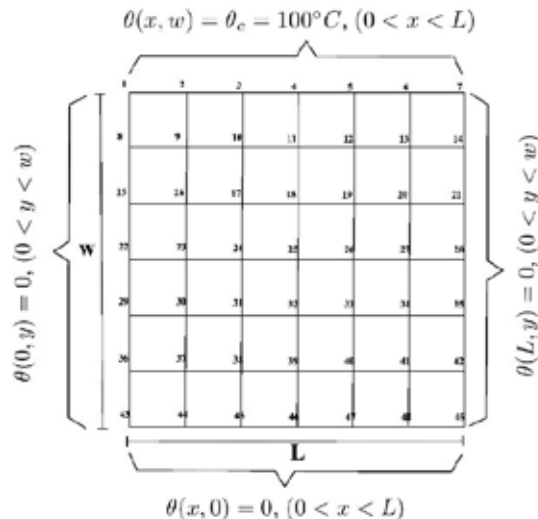


Figura 1

Solución analítica de una placa 2D.

Como se puede observar, en la Figura 1 el promedio de la distribución de temperaturas de los datos es 24.5418°C.

En el generador de mallas Delaunay 'triangle' (algunas veces llamadas redes), las mallas representan las partes geométricas más pequeñas (elementos) en las que el cuerpo fue discretizado, a fin de analizarlo por el Método de Elemento Finito (MEF). Existe una gran variedad de generadores de mallas, clasificadas como estructuradas y no estructuradas (Thompson, 1998).

La triangulación Delaunay es una estructura de puntos de un conjunto S como se muestra en la Figura 2, introducida por Boris Nikolaevich Delaunay en 1934. La principal característica de esta geometría, es que ninguno de los puntos de S cae en el interior del disco que circunscribe a cualquier triángulo (propiedad del círculo circunscrito). Cualquier cuerpo mallado con el método de la triangulación Delaunay, resulta en una malla no estructurada.

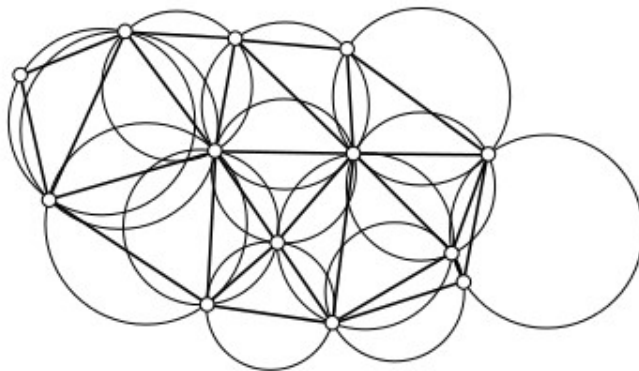


Figura 2

Ejemplo de una triangulación Delaunay (Siu, 2013)

Se han desarrollado algoritmos para producir triangulaciones de tipo Delaunay y codificaciones en diversos lenguajes de programación. Para el propósito del software desarrollado (TDHEAT-Mejorado), se eligió el generador de malla 'triangle' (Shewchuk, 2000) debido a que es robusto y por las facilidades que ofrece para generar 'archivos objeto' para ser invocados desde otros tipos de software externos. Por ejemplo, la siguiente línea se ejecuta en Linux, y compila el programa en triangle.c para generar el archivo objeto correspondiente, que puede invocarse por algún programa externo:

```
cc -DTRILIBRARY -O -c triangle.c
```

En la Figura 3 se muestra un ejemplo de la geometría 2D mallada, sin utilizar el software desarrollado TDHEAT-Mejorado

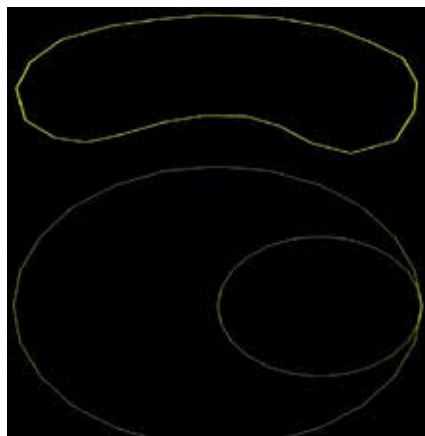
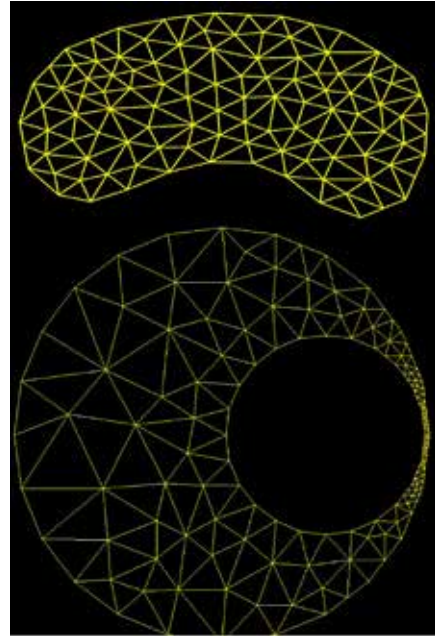


Figura 3

Ejemplo de una geometría 2D



A continuación en la Figura 4 se muestra la geometría mallada por la propiedad triangle.o desde el software desarrollado TDHEAT-Mejorado.



*Figura 4*

Geometría 2D mallada con triangulación Delaunay.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos de la solución analítica utilizando condiciones del tipo Dirichlet.

**TABLA 1**  
**RESULTADOS DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA UTILIZANDO CONDICIONES DEL TIPO DIRICHLET**

| <b>Nodo</b> | <b>Temperatura</b> | <b>Nodo</b> | <b>Temperatura</b> |
|-------------|--------------------|-------------|--------------------|
| 9           | 37.8585            | 26          | 21.8383            |
| 10          | 64.0153            | 27          | 12.915             |
| 11          | 74.3721            | 30          | 6.91793            |
| 12          | 64.015             | 31          | 11.6976            |
| 13          | 37.8581            | 32          | 13.5901            |
| 16          | 22.6846            | 33          | 11.6975            |
| 17          | 38.3576            | 34          | 6.91784            |
| 18          | 44.5634            | 37          | 3.1418             |
| 19          | 38.3574            | 38          | 5.31249            |
| 20          | 22.6844            | 39          | 6.17198            |
| 23          | 12.9152            | 40          | 5.31246            |
| 24          | 21.8383            | 41          | 3.14176            |
| 25          | 25.3715            |             |                    |

## 2. TDHEAT-Mejorado

El TDHEAT (por sus siglas en inglés, que significan Estado de Calor Permanente), es un programa modificado de TDFIELDS, que calcula la distribución de temperatura de una placa 2D usando el Método de Elemento Finito (MEF). Usualmente TDHEAT ha empleado generadores de mallas estructuradas no automáticos (Segerlind, 1984), con las cuales toma demasiado tiempo asignar manualmente los parámetros correspondientes para que generen una malla. El generador de mallas automático 'triangle' y la ecuación de Laplace (1) resueltos con el Método de Elemento Finito (MEF), fueron integrados en un solo software, llamado TDHEAT-Mejorado, que se construyó en la plataforma de software libre C++ Qt (Blanchett, 2008), donde los usuarios pueden realizar análisis de placas 2D en una interfaz gráfica amigable (GUI), véase la Figura 5, diseñado y construido para propósitos específicos como el expuesto anteriormente.

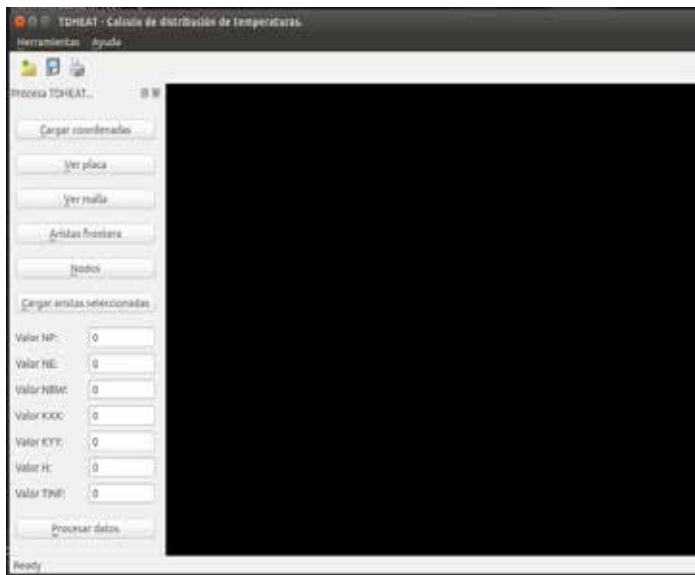


Figura 5

Interfaz gráfica de usuario (GUI) TDHEAT-Mejorado.

Se debe considerar que través de este software, los usuarios pueden cargar archivos con los datos geométricos y propiedades mecánicas del cuerpo para su análisis, para ello el cuerpo debe ser mallado.

En la Figura 6 se muestra la placa 2D mallada, utilizando el programa desarrollado TDHEAT-Mejorado.

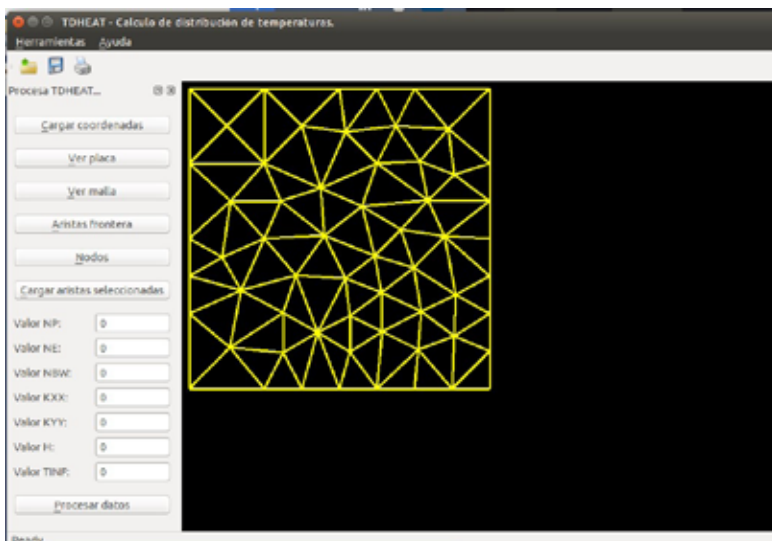
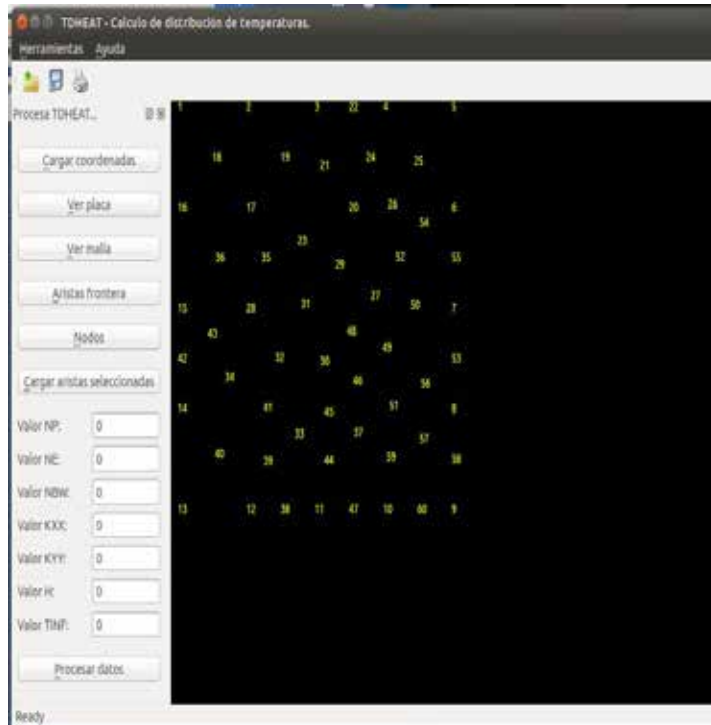


Figura 6

Placa 2D mallada desde TDHEAT-Mejorado.

La Figura 7 muestra los Nodos de la malla de la Placa 2D, utilizando el programa desarrollado TDHEAT-Mejorado



*Figura 7*

Nodos de la malla de la Placa 2D desde TDHEAT-Mejorado.

Los datos generados por la malla (elementos), con datos de sus propiedades mecánicas y condiciones de frontera, son procesados usando el Método de Elemento Finito(MEF) para calcular la distribución de temperaturas del cuerpo.

En la Figura 8 se muestran los resultados al usuario, utilizando el software desarrollado TDHEAT-Mejorado.

| Nodo | Carga   |
|------|---------|
| 16   | 0       |
| 17   | 37.5746 |
| 18   | 59.3937 |
| 19   | 69.516  |
| 20   | 42.2724 |
| 21   | 64.9049 |
| 22   | 100     |
| 23   | 31.8564 |
| 24   | 64.5428 |
| 25   | 44.3302 |
| 26   | 34.0596 |
| 27   | 16.0921 |

*Figura 8*

Tabla de resultados desde TDHEAT-Mejorado.



Con el software desarrollado denominado TDHEAT-Mejorado, se resolvió el problema de la placa 2D expuesta anteriormente, cuyos resultados se muestran en la Tabla 2.

**TABLA 2**  
**RESULTADOS DE LA DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS DE UNA PLACA 2D DE CONDICIONES DEL TIPO DIRICHLET USANDO FEM Y EL GENERADOR DE MALLAS 'TRIANGLE', AMBOS IMPLEMENTADOS EN TDHEAT-MEJORADO.**

| <b>Nodo</b> | <b>Temperatura</b> | <b>Nodo</b> | <b>Temperatura</b> |
|-------------|--------------------|-------------|--------------------|
| 17          | 48.2605            | 36          | 17.9532            |
| 18          | 62.0651            | 37          | 5.69764            |
| 19          | 75.8976            | 39          | 3.41216            |
| 20          | 52.9445            | 40          | 1.91255            |
| 21          | 72.6552            | 41          | 7.78297            |
| 23          | 43.3418            | 43          | 7.39749            |
| 24          | 72.6624            | 44          | 3.82804            |
| 25          | 53.812             | 45          | 7.84803            |
| 26          | 44.1248            | 46          | 11.1614            |
| 27          | 22.6281            | 48          | 18.9026            |
| 28          | 18.9807            | 49          | 12.8349            |
| 29          | 35.5021            | 50          | 12.3268            |
| 30          | 14.2308            | 51          | 6.32906            |
| 31          | 26.1312            | 52          | 25.5976            |
| 32          | 14.5074            | 54          | 22.4108            |
| 33          | 5.99066            | 56          | 4.38012            |
| 34          | 6.92923            | 57          | 2.1966             |
| 35          | 33.692             | 59          | 2.93802            |

El promedio de la distribución de temperaturas mostradas en la Tabla 2 es 24.424°C. Comparando estos resultados con los obtenidos en la solución analítica previa, que fue de 24.5418°C, arroja un porcentaje de error de 0.48%, lo cual es aceptable en términos de diseño.

## Resultados

Los desarrollos obtenidos con el Método de Volumen Finito (FVM) y el Método de Elemento Frontera (BEM) codificados en Fortran o en otro lenguaje de programación, y los generadores de mallas, deben ser apropiadamente modificados para generar 'archivos objeto' a fin de que puedan ser invocados desde programas externos, de esta forma se evita volver a codificar para que sean integrados en algún paquete computacional (software).

En este trabajo con el programa TDHEAT codificado en Fortran, se resolvió la ecuación del calor usando el Método de Elemento Finito y 'triangle' (generador de malla tipo Delaunay), y se ajustaron apropiadamente para ser invocados desde el software desarrollado TDHEAT-Mejorado.

Los resultados numéricos de la distribución de temperaturas en una placa 2D fueron validados con la solución analítica usando la ecuación de Laplace para transferencia de calor sin condiciones del tipo Dirichlet.

## Conclusiones

TDHEAT-Mejorado es el primer módulo de una serie del Método de Elemento Finito (MEF) y el Método de Elemento Frontera (BEM), que se utilizan en el área de Diseño Mecánico, los cuales se integrarán en un solo software más grande que está siendo desarrollado en C++ Qt.

El alcance de ese proyecto es tener disponible en las instituciones, un software robusto y extensible; además, en un futuro se buscará tomar las ventajas de los lenguajes ontológicos, como XML para especificar datos en las geometrías de cuerpos en 2D y 3D con sus propiedades mecánicas, condiciones de frontera, entre otros datos para que sean analizados.

El software será desarrollado con propósitos académicos y estará disponible para todos, a diferencia del software comercial del Método de Elemento Finito (MEF) y el Método de Elemento Frontera (BEM), cuyos códigos no están disponibles ni tampoco permiten al usuario implementar módulos.

### Bibliografía

Blanchette, J. & Summerfield, M. (2008). *C++ GUI Programming with Qt 4*. Prentice Hall Open Source Software Development Series.

Joe F. Thompson, B. K. S. & Weatherhill, N. P. (1998). *Hanbook of Grid Generation*. December 29, CRC Press.

Rischpater, R. (2013). *Application Development with Qt Creator*. PACKT. Publishing open source.

Segerlind, L.J. (1984). *Applied Finite Element Analysis*. John Wiley And Sons.

Shewchuk, J. R. Triangle (1996). Engineering a2d quality mesh generator and Delaunay triangulator, in "applied computational geometry: Towards geometric engineering". In volume 1148 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag. Pág. 203-222.

Shewchuk, J.R. (2000). Triangle, a two-dimensional quality mesh generator.<http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>.

Siu-Wing Cheng, T.K.D. &Dey, J.R. (2013). *Delaunay Mesh Generation*.CRC Press.

Zill, D.G. & Cullen, M.R. (2009). *Differential Equations with Boundary-Value Problems*. BROOKS/COLE CENGAGE Learning.

